

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
SEMINARSKI RAD

**DINAMIČKI MODEL LJUBAVI
MODEL ROMEO I JULIJA**

Studenti: Petra Kralik
Jure Volarević

Zagreb, lipanj 2010.

SADRŽAJ

1. UVOD
2. DINAMIČKI SUSTAVI
3. DINAMIČKI MODEL LJUBAVI
4. RJEŠAVANJE MODELA
5. ZAKLJUČAK
6. LITERATURA

1. UVOD

Dinamički model ljubavi još je 1960. počeo opisivati Rapoport, a proučavali su ga i Radzicki (1993.) i Strogatz (1994.). Općenito, ljubav je teško opisati matematički. Postoji mnogo vrsta ljubavi, uključujući intimnost, strast i predanost, te se svaka vrsta sastoji od više različitih osjećaja. Osim druge osobe, može se voljeti sebe, život, čovječanstvo, itd. Nadalje, suprotno od ljubavi ne mora biti mržnja, ta dva osjećaja mogu postojati uzajamno, te netko može istovremeno voljeti neke osobine partnera, a neke mrziti. Očito je nerealno pretpostaviti da je nečija ljubav uzrokovana samo vlastitim osjećajima i osjećajima druge osobe, neovisno o drugim utjecajima i da su parametri koji karakteriziraju međuodnos nepromjenjivi, te stoga isključuju mogućnost učenja i prilagođavanja.

2. DINAMIČKI SUSTAVI

Općenito u jednodimenzionalnom problemu promatra se veličina x koja se mijenja u vremenu t , ali u praksi se puno češće susreću problemi u kojima sudjeluje više međusobno zavisnih veličina koje se mijenjaju u vremenu. To znači da vrijednost jedne veličine utječe na vrijednost druge.

$$x' = f(x, y, t) \quad (1)$$

$$y' = g(x, y, t) \quad (2)$$

Tu je $x' = \frac{dx}{dt}$ i $y' = \frac{dy}{dt}$, a f i g su funkcije triju varijabla koje opisuju brzinu promjene od x , odnosno y u ovisnosti o x , y i t . U svakom trenutku t načelno mogu se odrediti vrijednosti $x(t)$, $y(t)$ tih veličina. Također, može se procjenjivati brzine njihovih promjena. To dovodi do vrlo važnog poopćenja običnih diferencijalnih jednačja, odnosno do sustava običnih diferencijalnih jednačja. Promatrajući slučaj kada te brzine ovise samo o vrijednostima veličina x i y , a ne o promatranom vremenu, dobije se sljedeći oblik sustava:

$$x' = f(x, y) \quad (3)$$

$$y' = g(x, y) \quad (4)$$

Cilj je riješiti taj sustav, tj. dobiti formule za $x(t)$, $y(t)$ za svaki t i tako opisati život ovog dinamičkog sustava. To općenito nije moguće, pa se pribjegava drugim metodama. Na primjer, ako je poznato stanje dinamičkog sustava u trenutku t_0 (tj. početni uvjeti $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$) koriste se grafičke ili numeričke metode kojima se mogu približno odrediti $x(t)$ i $y(t)$ za svaki t . Za dobivanje približnih rješenja neophodne su suvremene kompjutorske tehnike.

Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu ima trajektorija točke (x_0, y_0) , sa svojstvom da postoji vrijeme t_0 tako da bude $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$ (tj. putanja koja prolazi kroz zadani početni uvjet). Prema definiciji, to je skup svih $(x(t), y(t))$, gdje t prolazi svim vremenima (svim realnim brojevima). To je, dakle, skup svih stanja (život) tog dinamičkog sustava koji sadrže stanje (x_0, y_0) .

Primjer takvog modela je dinamički model ljubavi.

3. DINAMIČKI MODEL LJUBAVI

Model privlačnosti među dvijema osobama jednostavno se može prikazati pomoću dvije linearne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ \end{aligned} \quad (5)$$

gdje je $R(t)$ Romeova ljubav prema Juliji u vremenu t , a $J(t)$ Julijina ljubav prema Romeu. Parametri a i b predstavljaju Romeov romantični stil, dok parametri c i d opisuju Julijin romantični stil. Parametar a govori koliko Romeovi osjećaji utječu na njega, dok b opisuje koliko na njega utječu Julijini osjećaji. Parametri c i d opisuju isto s Julijina gledišta.

Romantični stilovi se mogu podijeliti na 4 skupine:

- 1) Pohlepnik: $a > 0$, $b > 0$ (Romeo je ohrabren svojim osjećajima prema Juliji i njezinim osjećajima prema njemu)
- 2) Narcis: $a > 0$, $b < 0$ (Romeo je više stalo do vlastitih osjećaja nego Julijinih)

- 3) Oprezni ljubavnik: $a < 0$, $b > 0$ (Romeo bježi od vlastitih osjećaja, ali je ohrabren Julijinim)
- 4) Pustinjak: $a < 0$, $b < 0$ (Romeo bježi kako od svojih tako i od Julijinih osjećaja)

Sustav jednažbi (5) ima jednu stacionarnu točku kada je $R = J = 0$ a označava ravnodušnost između Romea i Julije.

4. RJEŠAVANJE MODELA

Model je rješavan u programskom paketu *Wolfram Mathematica 7.0*. Slijedi prikaz modela kako je napisan u programskom paketu:

```
f[x,y]:=λ1 x[t]+λ2 y[t]
g[x,y]:=λ3 x[t]+λ4 y[t]
```

```
rjesenje:=Evaluate[{x[t],y[t]}/.DSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0},{x,y},t]]
```

Za rješenje potrebno je zadati parametre (λ_1 , λ_2 , λ_3 i λ_4) i početne uvjete (x_0 , y_0). Da bi se istovremeno dobilo više trajektorija zadano je više početnih uvjeta. Za prikazivanje eksplicitnih rješenja i grafa potrebno je napisati sljedeće naredbe:

```
Evaluate[Table[rjesenje,{x0,x0_min,x0_max},{y0,y0_min,y0_max}]]
```

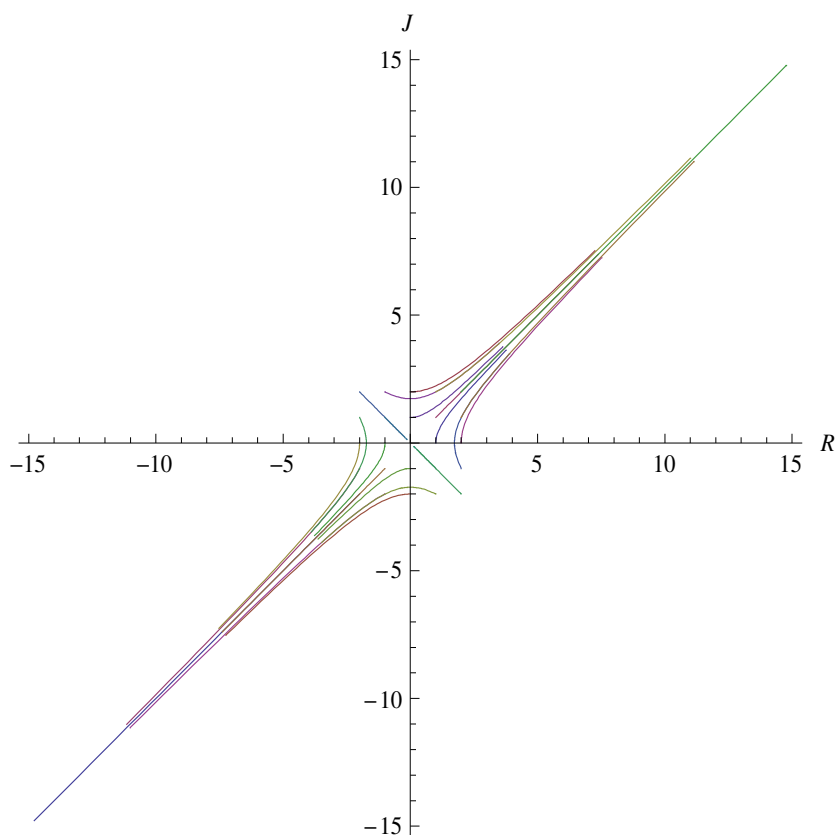
```
ParametricPlot[Evaluate[Table[rjesenje,{x0,x0_min,x0_max},{y0,y0_min,y0_max}]],{t,0,1},AspectRatio->Automatic,AxesOrigin->{0,0},PlotRange->Automatic,AxesLabel->{x,y}]
```

Primjer 1: nema utjecaja vlastitih osjećaja

Na Romea i Juliju ne utječu njihovi vlastiti osjećaji i reagiraju samo na osjećaje onog drugog, odnosno $a = d = 0$. Dinamika sustava u ovom slučaju ovisi isključivo o parametrima b i c , te postoje tri moguća ishoda:

1.) Dva ljubavnika: $b > 0, c > 0$ (rezultira sedlom, ili se vole ili se mrze)

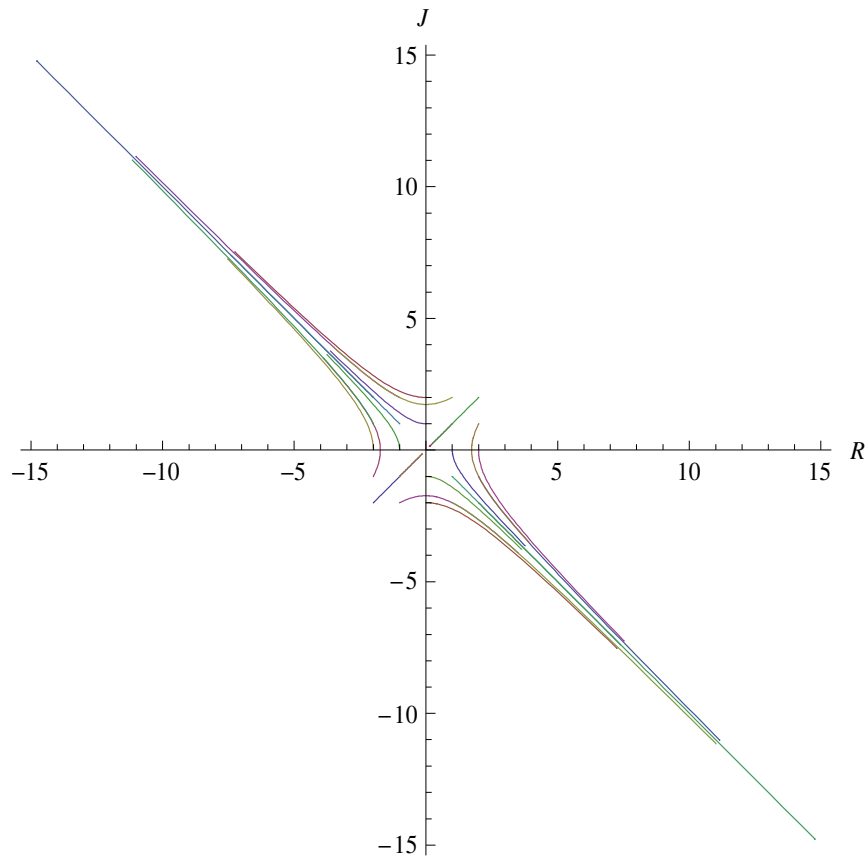
U ovom slučaju Romeo i Julija se ili beskonačno vole (I kvadrant), odnosno da Romeo, ohrabren Julijinim osjećajima, sve više voli Juliju, te da i Julija sve više voli Romea ohrabrena njegovim osjećajima, ili beskonačno ne vole (mrze) (III kvadrant), gdje pak Romeova ljubav postaje sve manja, odnosno Julijini osjećaji ne utječu na njega, te isto vrijedi za Juliju (slika 1.).



Slika 1.

2.) Dva narcisa: $b < 0$, $c < 0$ (rezultira sedlom, jedno zaljubljeno, a drugo mrzi)

Ovo je slučaj u kojem jedno voli, a drugo ne. Konkretno, što Julija više ohrabruje Romea, on je sve manje voli (II kvadrant), odnosno što više Romeo ohrabruje Juliju (udvara joj) ona je sve manje zainteresirana za njega (IV kvadrant), kao što je prikazano na slici 2.

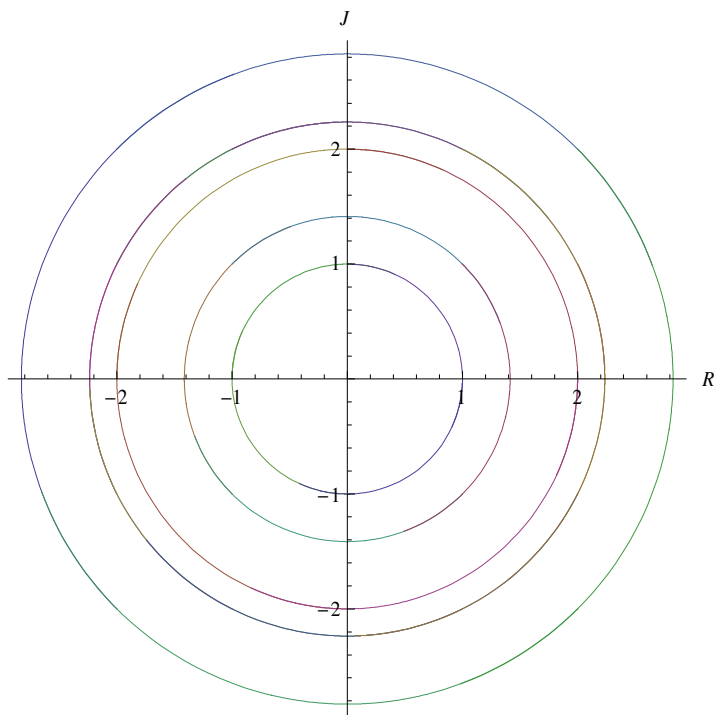


Slika 2.

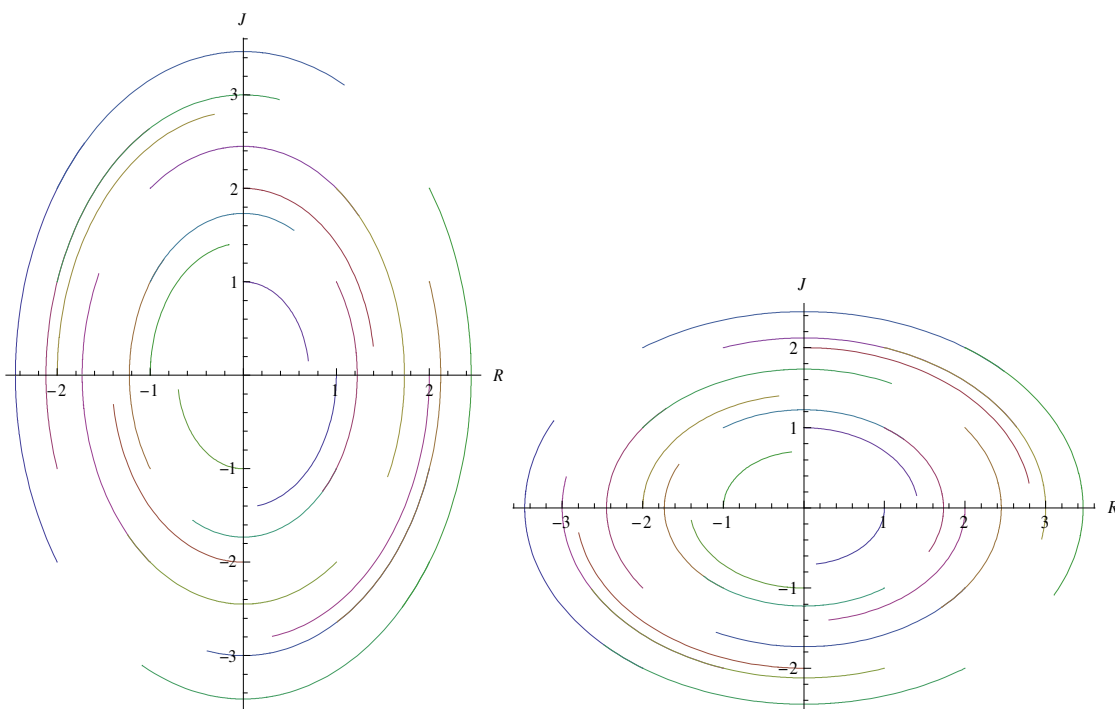
3.) Narcis i ljubavnik: $bc < 0$ (rezultira elipsom, beskrajni ciklus ljubavi i mržnje)

Oblik i smjer elipse ovisi o parametrima b i c . Odnosno ako vrijedi $|b| = |c|$ dobije se kružnica, odnosno intenzitet njihovih osjećaja (pozitivnih ili negativnih), koji se javljaju zbog ohrabrivanja onog drugog, je jednak (slika 3). U prvom kvadrantu, iako ohrabren Julijinim osjećajima Romeo je sve manje zaljubljen, u drugom kvadrantu i Julijini osjećaji počinju slabjeti, tako da se sve manje vole, u trećem kvadrantu Romeovi osjećaji počinju se ponovno buditi, ali je sad Julija sve manje zainteresirana, dok u četvrtom kvadrantu i njegovi i njeni osjećaji postaju sve snažniji. Dakle razvija se beskonačan ciklus ljubavi i mržnje. Ako vrijedi da je $b > 0$ i $c < 0$, tada je orijentacija krivulje u smjeru kazaljki na satu, a za $b < 0$ i $c > 0$ je

orijentacija krivulje u smjeru suprotnom od kazaljki na satu. U slučaju kada vrijedi $|b| < |c|$ Julijini osjećaji prema Romeu su snažniji, bilo pozitivni ili negativni (slika 4), a u slučaju kada je $|b| > |c|$ Romeovi osjećaji su snažniji tako da se kao rezultati dobiju elipse, ali također nastaje beskonačan ciklus ljubavi i mržnje (slika 5).



Slika 3.

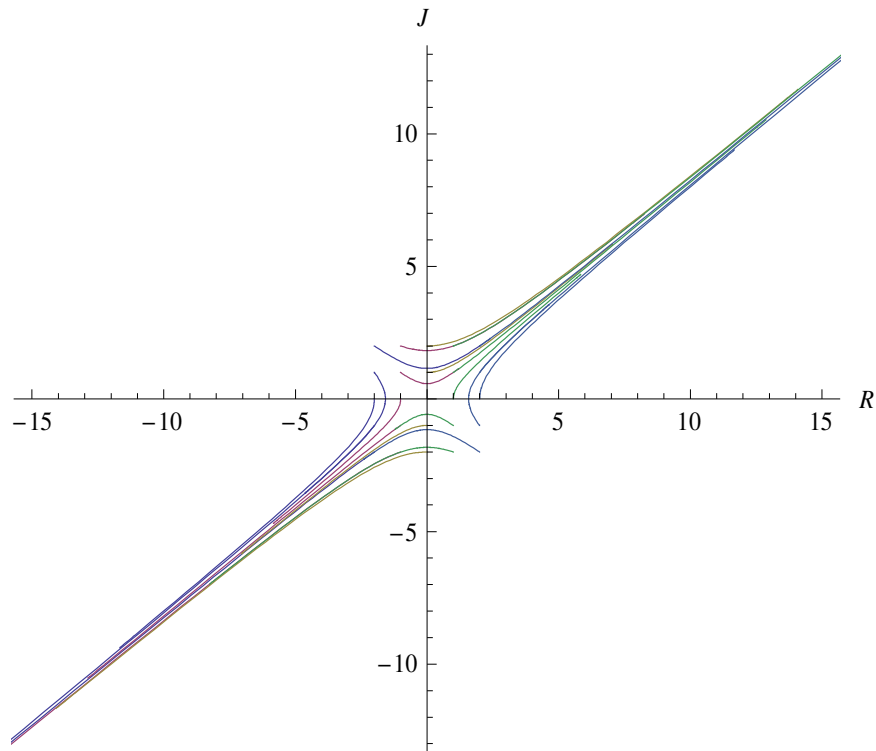


Slika 4.

Slika 5.

Primjer 2: pohotnik + pohotnik

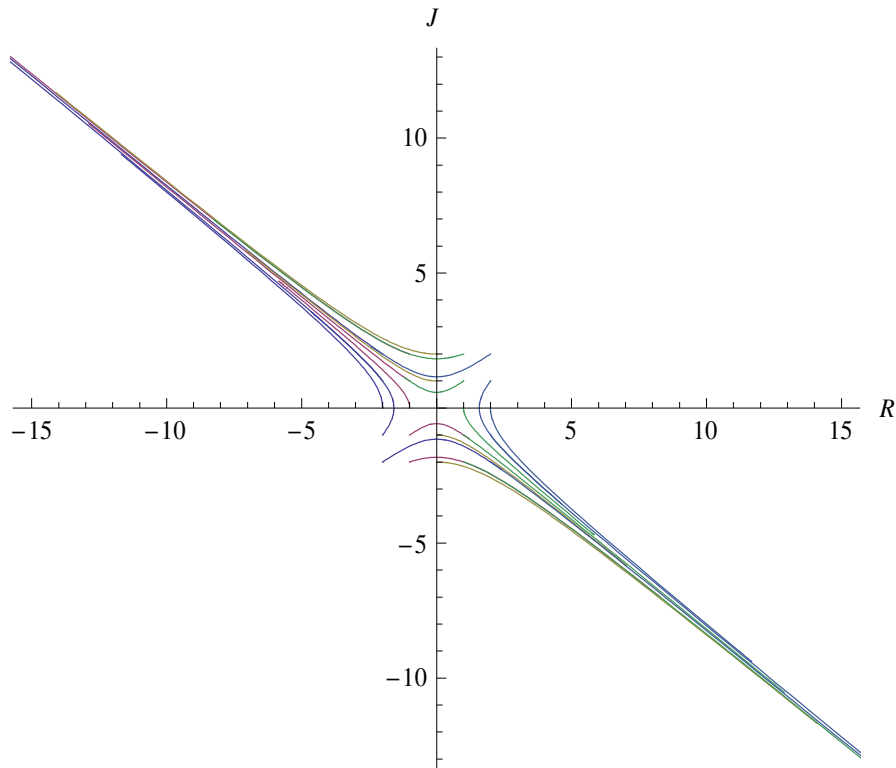
Romeo i Julija su ohrabreni vlastitim osjećajima, kao i osjećajima onog drugog. Bez obzira na omjer intenziteta osjećaja ovaj odnos će uvijek završiti tako da se ili oboje beskonačno (jako, mnogo, puno) vole (I kvadrant) ili beskonačno mrze (III kvadrant), a to ovisi isključivo o početnim uvjetima, tj. kakav je bio njihov odnos na početku promatranja (slika 6).



Slika 6.

Primjer 3: narcis + narcis

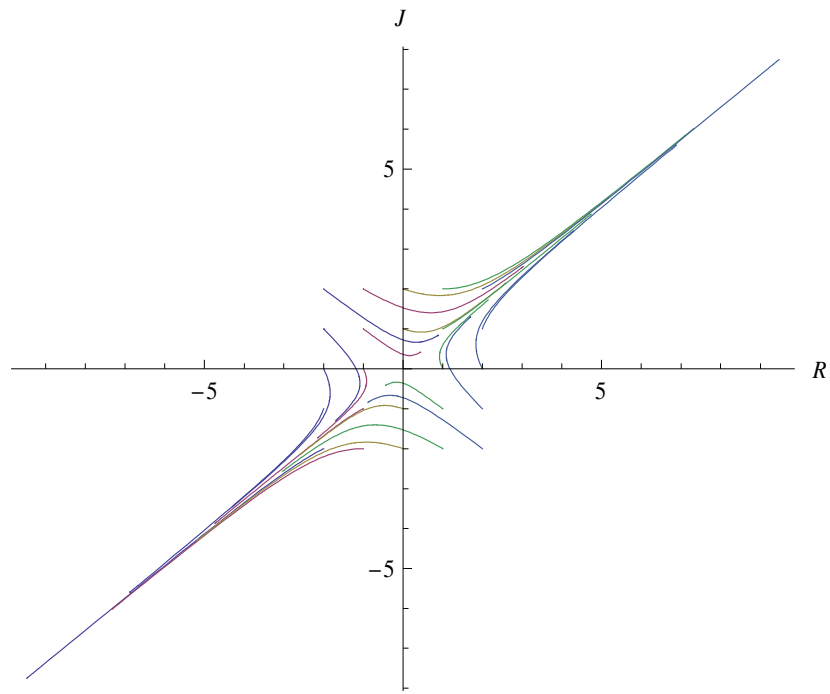
Romeo i Julija su ohrabreni vlastitim osjećajima, ali što Julija više ohrabruje Romea (II kvadrant) on je sve manje voli, odnosno što se više Romeo udvara Juliji ona je sve manje zainteresirana za njega (IV kvadrant). Ovakav odnos će uvijek rezultirati mazohističkom situacijom u kojoj jedno od njih bude beskonačno zaljubljeno, a da drugo beskonačno mrzi (slika 7).



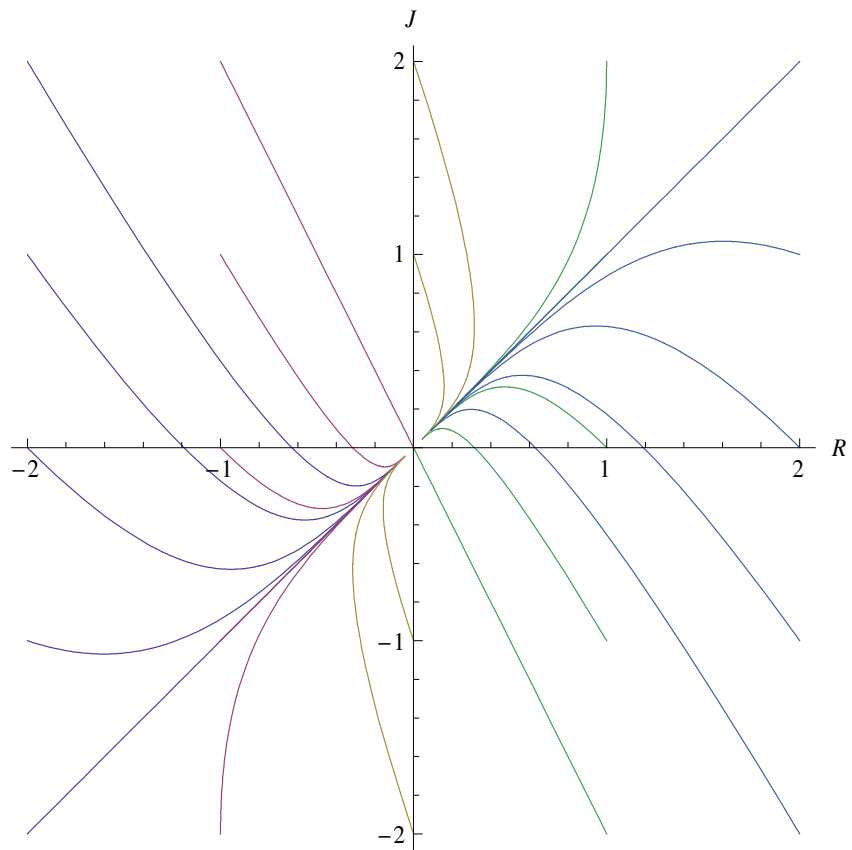
Slika 7.

Primjer 4: oprezni ljubavnik + oprezni ljubavnik

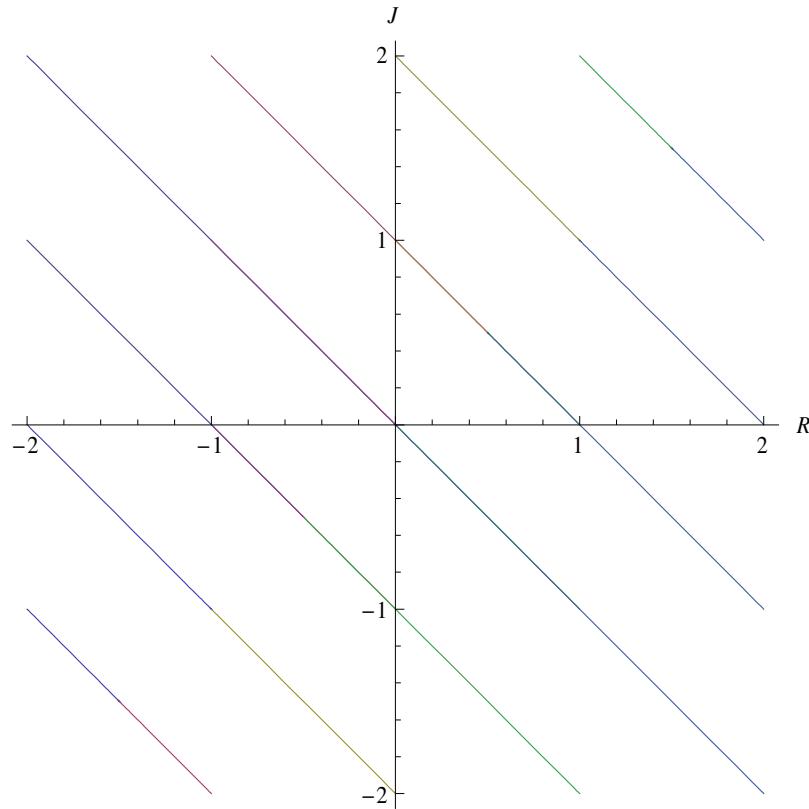
I Romeo i Julija su ohrabreni osjećajima onog drugog, ali se ne žele ozbiljno vezati te se s toga udaljavaju od vlastitih osjećaja. Rezultat ovakvoga odnosa ovisi o tome odgovaraju li Romeo i Julija više na osjećaje onog drugoga, $|a| < |b|$, ili su im pak važniji njihovi vlastiti osjećaji, $|a| > |b|$. Prvi slučaj rezultira beskonačnom ljubavlju (I kvadrant) ili mržnjom (III kvadrant), što ovisi o početnim uvjetima, jer Romeo i Julija ipak odgovaraju na osjećaje onog drugog (slika 8). U drugom slučaju će pak doći do međusobne apatije u kojoj ni Romeo ni Julija neće imati nikakve osjećaje prema onom drugom i trajektorija ide prema ponoru (0,0) (slika 9). Ukoliko Romeo i Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog, $|a| = |b|$, tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem se Romeo i Julija ili vole ili mrže (slika 10). Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je $|a| = |c|$ i $|b| = |d|$.



Slika 8.



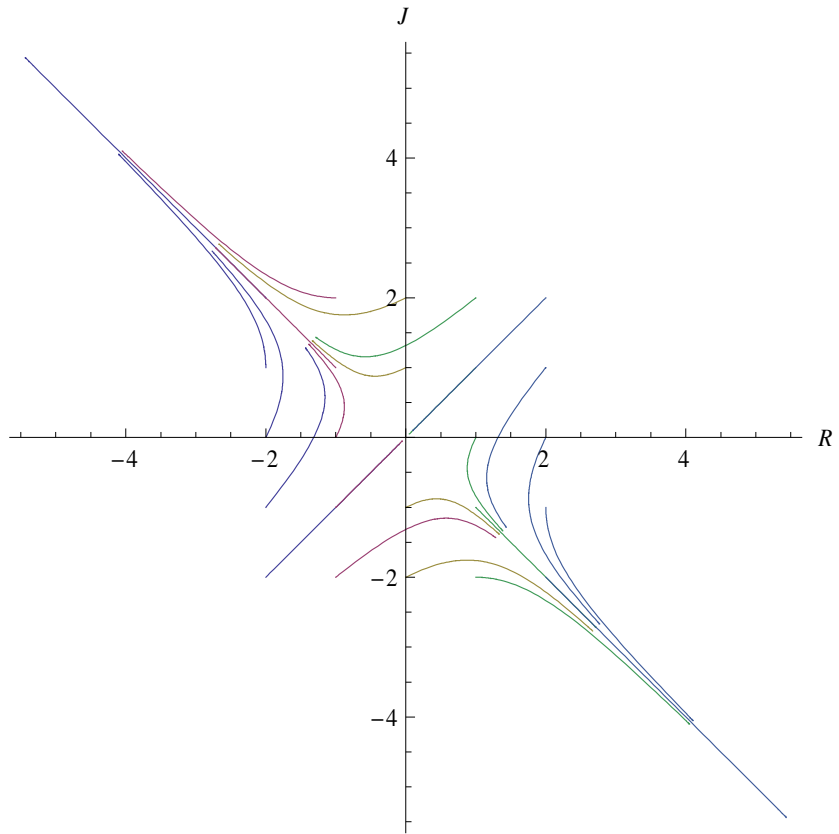
Slika 9.



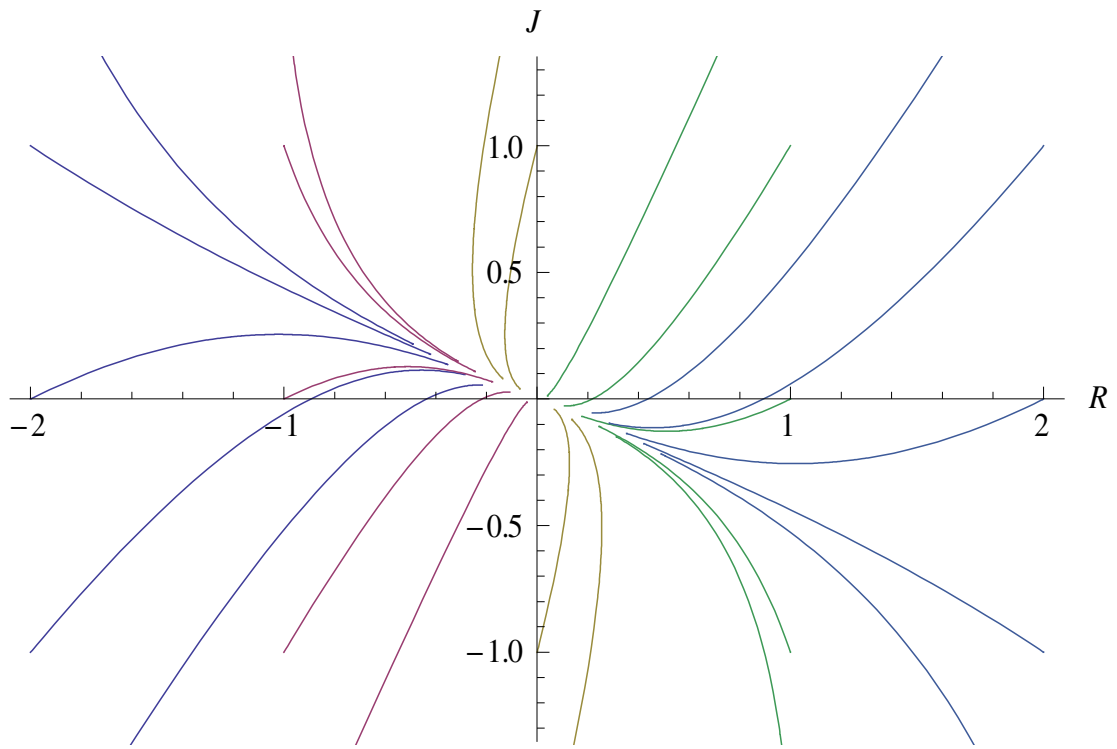
Slika 10.

Primjer 5: pustinjač + pustinjač

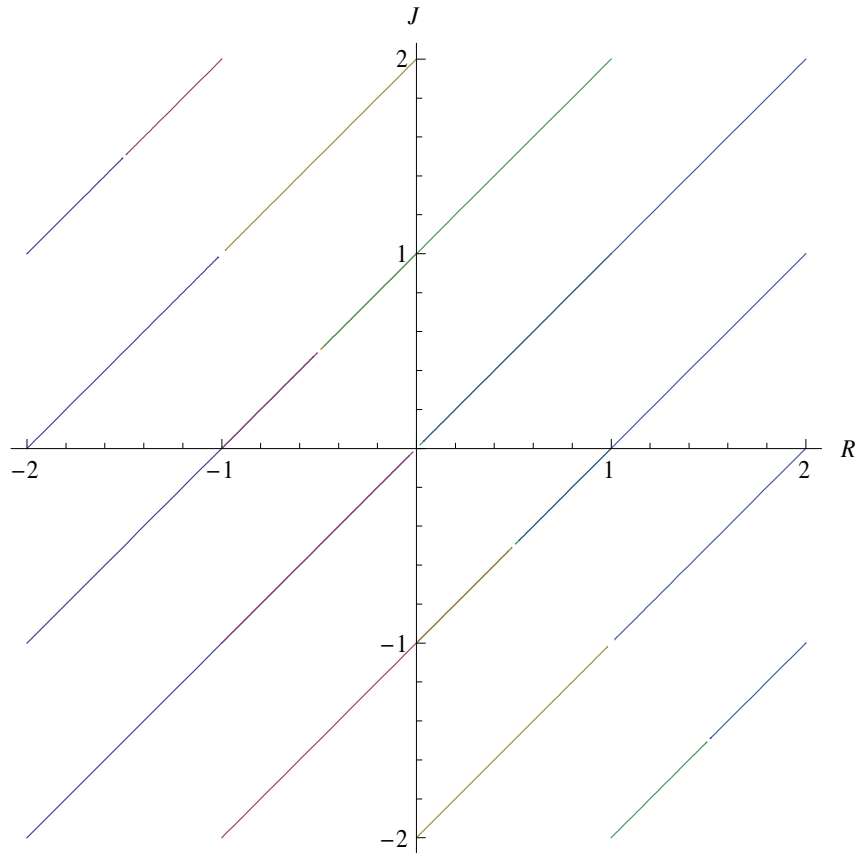
Ako su Romeo i Julija oboje pustinjači tada će njihov odnos rezultirati tako da je jedno od njih beskonačno zaljubljeno dok ga ono drugo beskonačno mrzi ukoliko Romeo i Julija više odgovaraju na osjećaje onog drugog nego na svoje osjećanje, $|a| < |b|$ (slika 11). U suprotnom, kada je $|a| > |b|$, dolazi do međusobne apatije (slika 12). Ukoliko Romeo i Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog, $|a| = |b|$, tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem je jedno od njih zaljubljeno, a drugo mrzi (slika 13). Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je $|a| = |c|$ i $|b| = |d|$.



Slika 11.



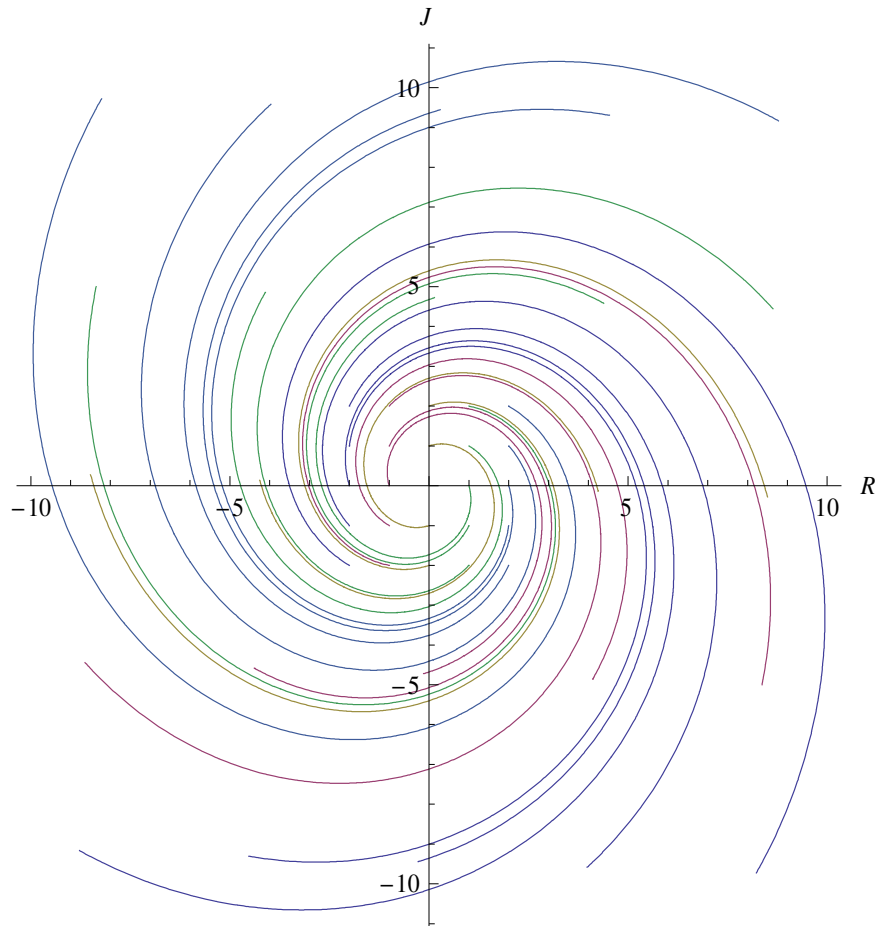
Slika 12.



Slika 13.

Primjer 6: pohotnik + narcis

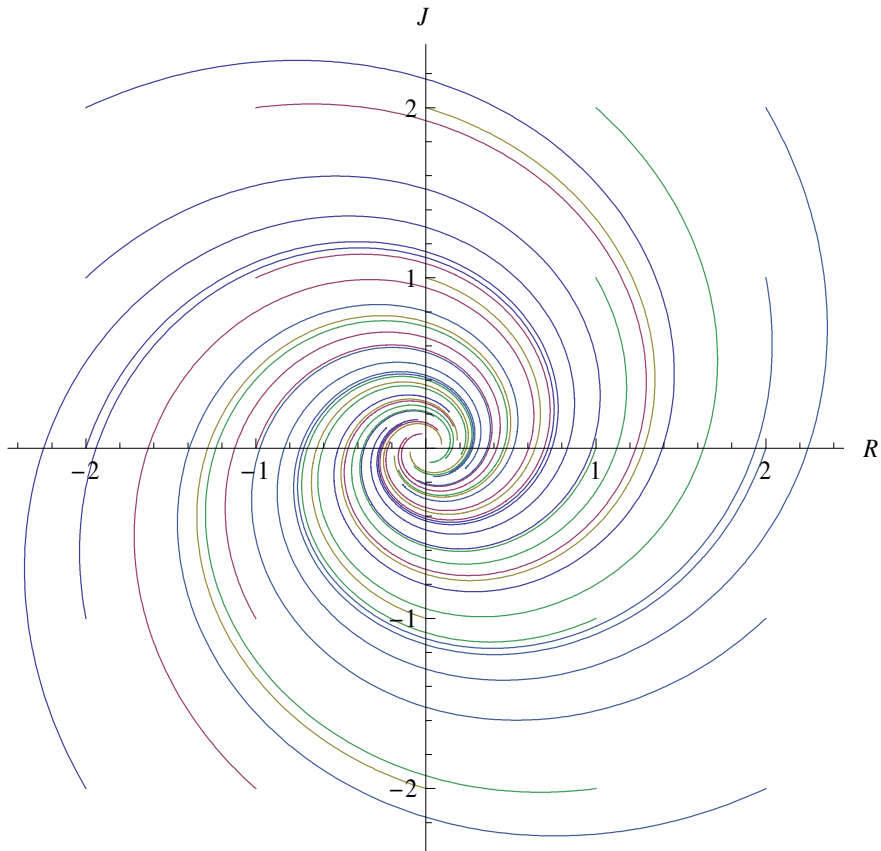
Romeo, kao pohotnik, ohrabren je svojim kao i Julijinim osjećajima, no što se više udvara Juliji ona ga manje voli, jer joj je znatno više stalo do vlastitih osjećaja. Trajektorija ovakva odnosa ima oblik spirale koja ide iz početnih uvjeta prema sve većim vrijednostima (slika 14), odnosno točka $(0,0)$ predstavlja izvor. Mijenjanjem parametara mijenja se i oblik spirale.



Slika 14.

Primjer 7: oprezni ljubavnik + pustinjač

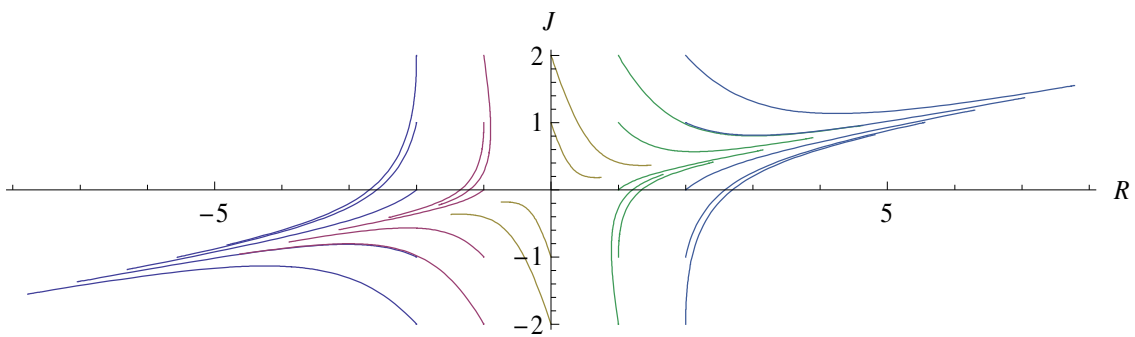
Romeo je ohrabren Julijinim osjećajima, ali se udaljava od svojih osjećaja, dok se pak Julija udaljava i od svojih i od Romeovih osjećaja. Kao rezultat, njihovi osjećaji će se neprestano smanjivati, te prelaze u međusobnu apatiju (slika 15), odnosno točka (0,0) predstavlja ponor. Mijenjanjem parametara mijenja se i oblik spirale.



Slika 15.

Primjer 8: pohotnik + oprezni ljubavnik

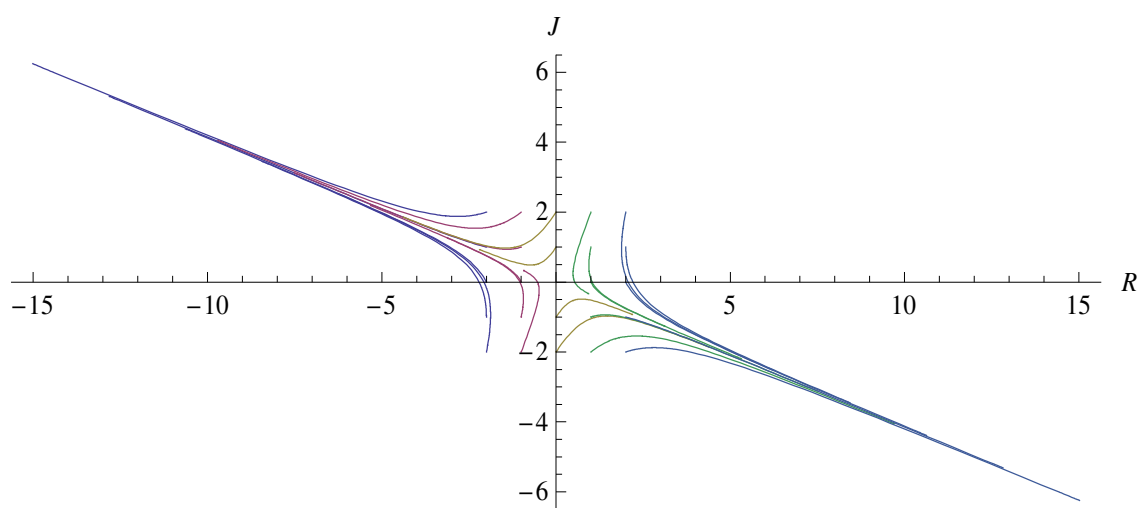
Slučaj kada je Romeo pohotnik, a Julija oprezni ljubavnik uvijek će rezultirati tako da se beskonačno vole ili beskonačno mrze, s tim da će Julijini osjećaji uvijek biti manjeg intenziteta od Romeovih zbog toga što se Julija udaljuje od svojih vlastitih osjećaja (slika 16).



Slika 16.

Primjer 9: narcis + pustinjač

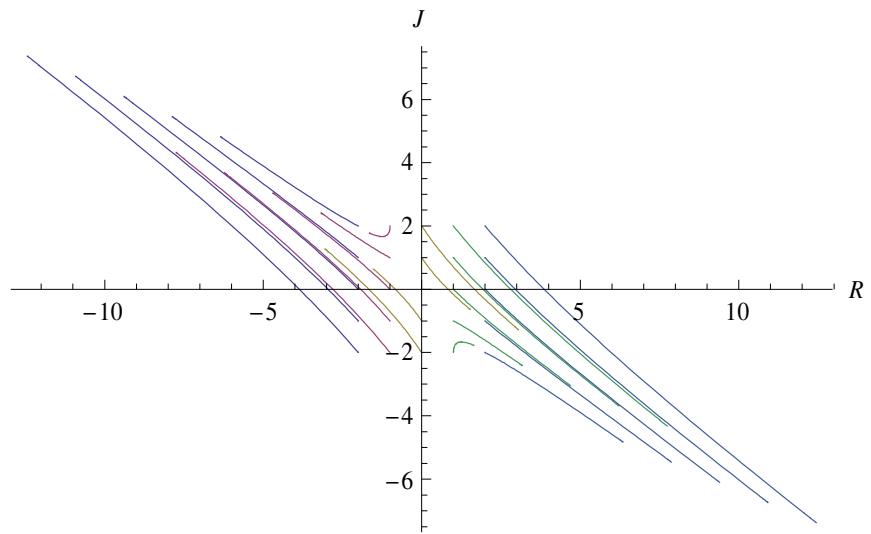
Kada je Romeo narcis, a Julija pustinjač dolazi do situacije u kojoj je jedno od njih beskonačno zaljubljeno, dok ono drugo beskonačno mrzi (slika 17).



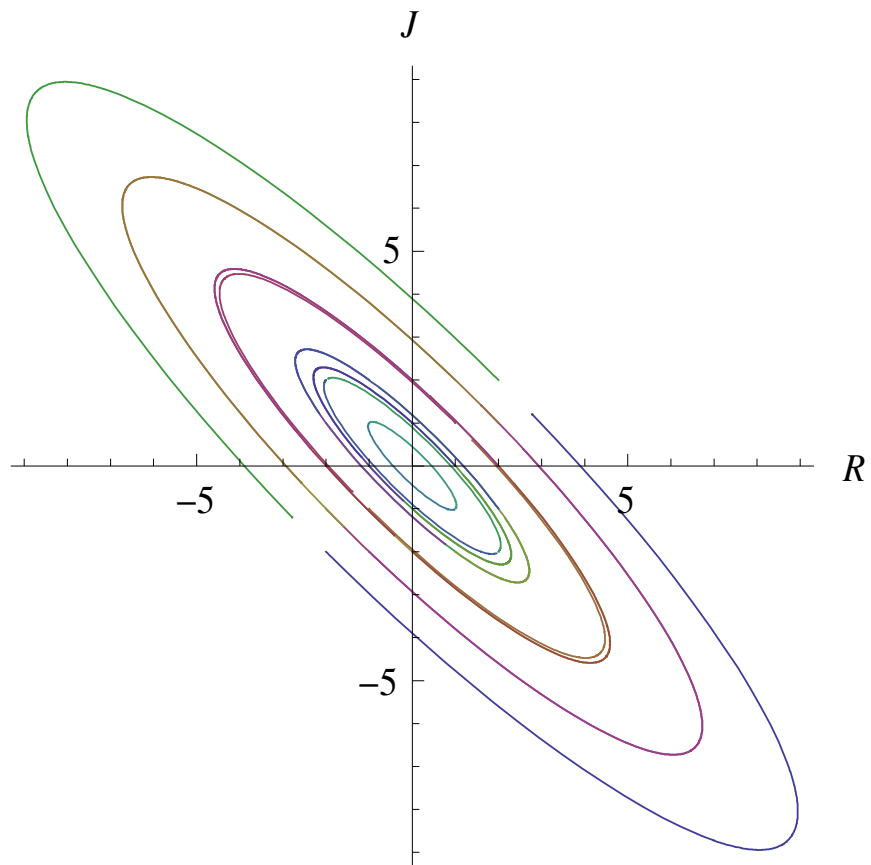
Slika 17.

Primjer 10: pohotnik + pustinjač

U ovom slučaju Romeo i Julija imaju potpuno suprotne romantične stilove. Kada vrijedi da je $|a| > |b|$ na Romea više utječu njegovi vlastiti osjećaji, nego Julijina ohrabrivanje, odnosno odbijanje. Tako da, iako ga Julija sve više ohrabruje, Romeovi vlastiti osjećaji su snažniji, odnosno on je sve nezainteresiraniji, što je vidljivo u drugom kvadrantu, dok je pak u četvrtom kvadrantu vidljivo da Romeovi osjećaji to više rastu što ga više Julija odbija (slika 18). U slučaju kada je $|a| < |b|$ Julijini osjećaji (ohrabrivanja i odbijanja) više utječu na Romea nego njegovi vlastiti. Ovdje dolazi do odnosa vatra-led, odnosno, iako je veći utjecaj Julijinih osjećaja na Romea nego utjecaj njegovih vlastitih osjećaja, njihovi će odnos biti komplementarno suprotan (slika 19).



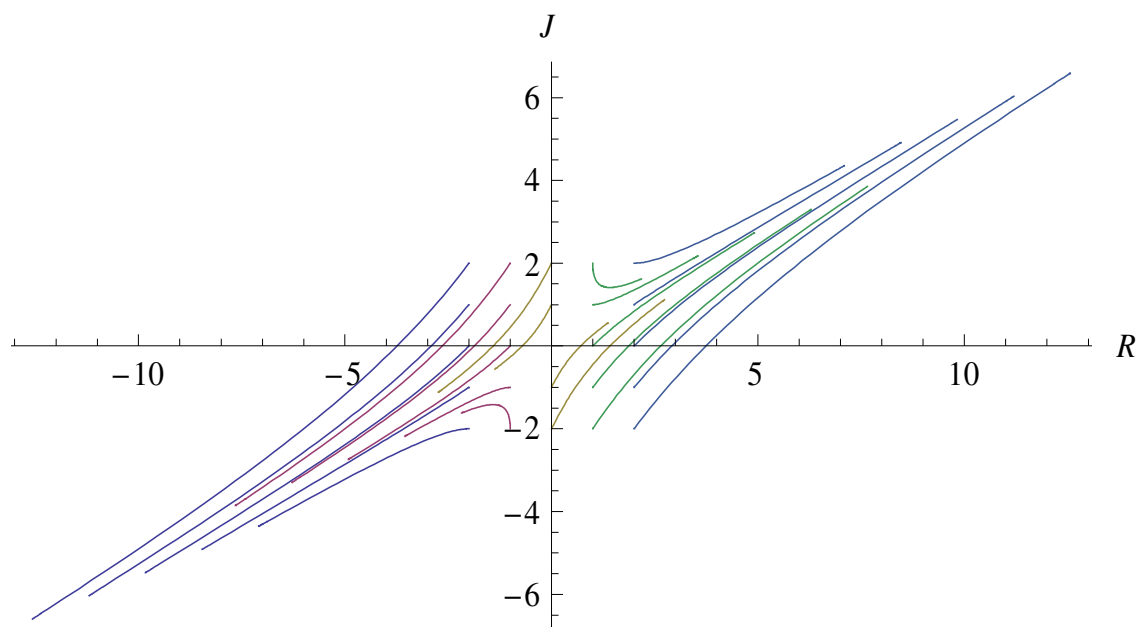
Slika 18.



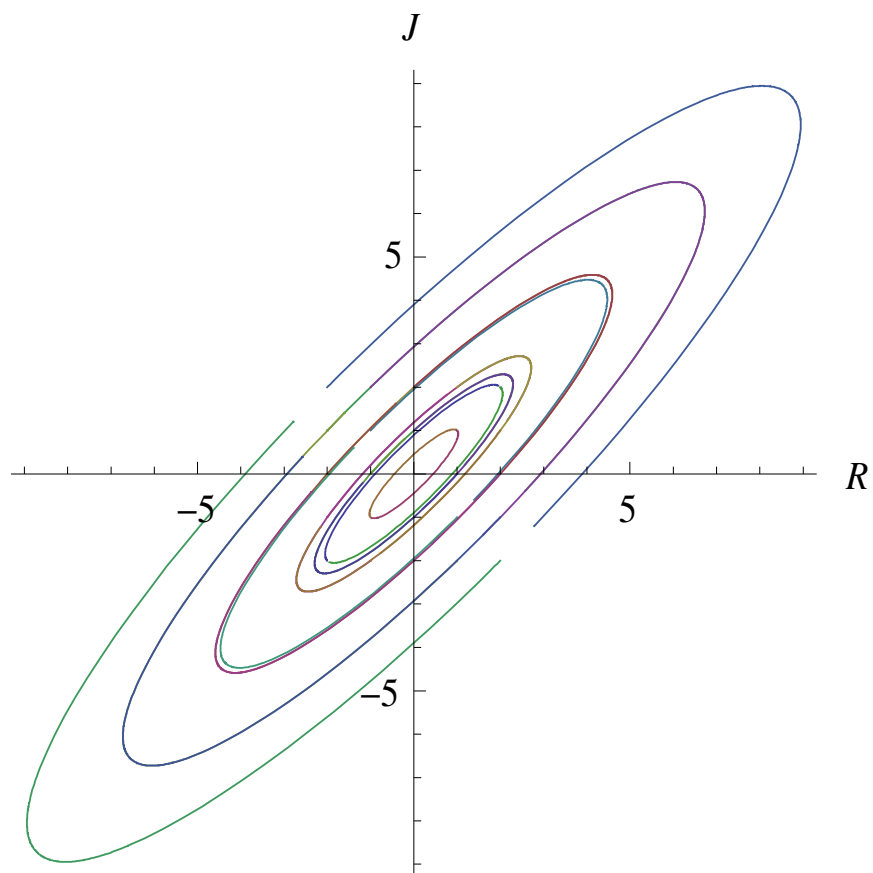
Slika 19.

Primjer 11: narcis + oprezni ljubavnik

I u ovom slučaju Romeo i Julija imaju suprotne romantične stilove. U slučaju kada je $|a| > |b|$, dakle Romeovi vlastiti osjećaji više utječu na njega nego Julijina nastojanja, ako je on zaljubljen i ona ga ohrabruje voljet će je sve više – oprezan ljubavnik (I kvadrant). Ali ako on nije zainteresiran, odnosno stalo mu je samo do njega i ona će ga početi izbjegavati - narcis (III kvadrant) (slika 20). Kada je $|a| < |b|$, Julijina nastojanja imaju veći utjecaj na Romea nego njegovi vlastiti osjećaji. Ako je on zaljubljen i Julija ga ohrabruje i njegova ljubav će rasti, no ako ga ona odbija počet će se hladiti (I kvadrant). Ako pak on nije nije zainteresiran za nju, a ni ona za njega voljet će se sve manje. Ako Julija pokaže interes i Romeo će se početi zaljubljuvati (III kvadrant) (slika 21).



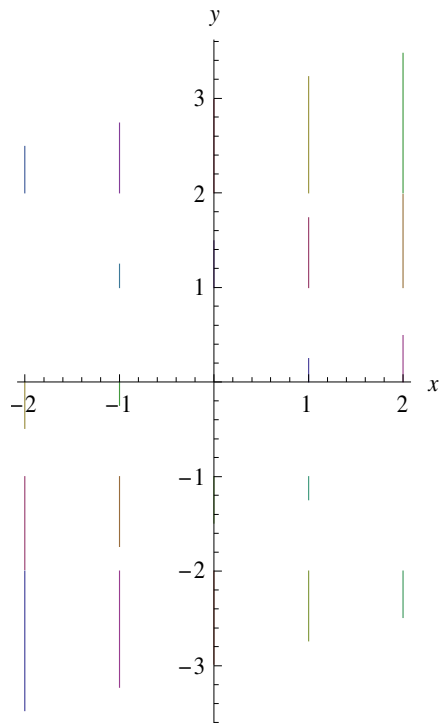
Slika 20.



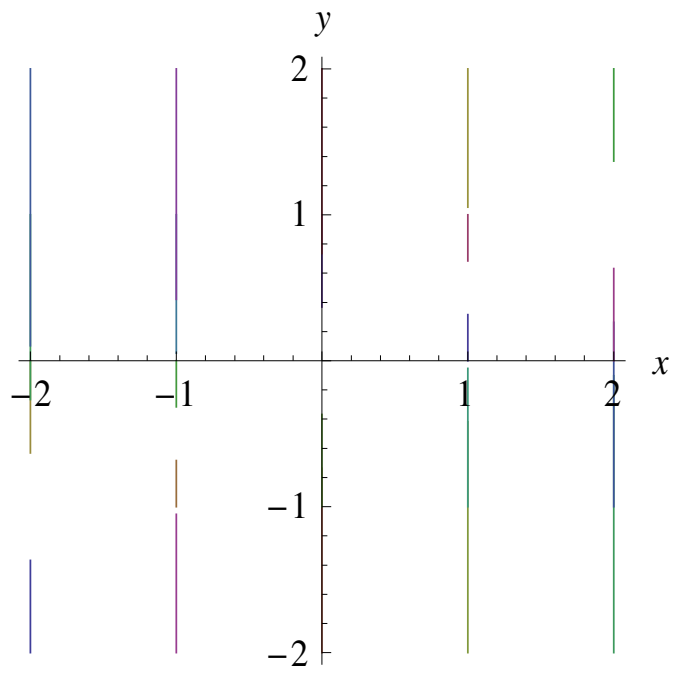
Slika 21.

Primjer 12: na Romea ne utječu nikakvi osjećaji

Ako pretpostavimo da na Romea ne utječu ni vlastiti osjećaji ($a=0$), niti osjećaji koje prima od Julije ($b=0$), tada je R konstanta, odnosno Romeova ljubav (ili mržnja) se ne mijenja. Izgled grafa će isključivo ovisiti o Julijinim vlastitim osjećajima, odnosno ako su njeni osjećaji snažniji od osjećaja koje prima od Romea, $|c| < |d|$, njena će ljubav (ili mržnja) rasti u beskonačnost za $d > 0$ (slika 22) ili će prelaziti u apatiju za $d < 0$ (slika 23).



Slika 22.



Slika 23.

5. ZAKLJUČAK

Matematičkim sustavom od dvije linearne jednadžbe,

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}$$

opisan je ljubavni odnos između Romea i Julije. Iako jednostavan, linearan model ljubavi pokazao je iznimno složenu dinamiku, odnosno dao je mnogo različitih rješenja, ovisno o kombinaciji ljubavnih stilova. Pojednostavljenjem sustava, odnosno isključivanjem vanjskih utjecaja, ljubav postaje jednostavna skalarna vrijednost, odnosno dosljedna je u opisivanju vlastitih osjećaja, te osjećaja prema drugima.

6. LITERATURA

1. Sprott, J.C.: Dynamical Models of Love; Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. **8**, No.3, July, 2004.
2. Sprott, J.C.: Dynamical Models of Happiness; Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. **9**, No.1, January, 2005.
3. www.science.smith.edu
4. Interna skripta: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu